Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

# Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 15 — 06. Dezember 2022

**Aufgabe 1:** *(2+2+1 Punkte)* In dieser Aufgabe folgern wir *den Satz von Bolzano-Weierstrass in* $\mathbb{R}^n$ aus seiner eindimensionalen Version. Dazu sei $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ ausgestattet mit der Metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nun sei $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, d)$. Wir verwenden im Folgenden die Notation

$$a_m = (a_{1,m}, \ldots, a_{n,m}) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{für } m \in \mathbb{N},$$

womit insbesondere die $\ell$-te Komponente von $a_m$ mit $a_{\ell,m}$ notiert wird, für $1 \leq \ell \leq n$.

Beweise die folgenden Behauptungen.

(a) Die Folge $(a_{\ell,m})_{m\in\mathbb{N}}$ der $\ell$-ten Komponenten von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$.

(b) Es gibt eine Teilfolge von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass sowohl die Folge $(a_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ als auch die Folge $(a_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$ bezüglich dieser Teilfolge jeweils konvergieren.

(c) Konstruiere mit dem Resultat aus (b) eine konvergente Teilfolge für $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^n, d)$.

**Aufgabe 2:** *(2 Punkte)* Zeige, dass der *limes inferior* $\liminf$ und der *limes superior* $\limsup$ einer beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ jeweils wohldefiniert sind, d.h die Grenzwerte aus den Definitionen von $\liminf$ und $\limsup$ existieren jeweils.

**Aufgabe 3:** *(3 Punkte)* Wir definieren die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := \sqrt{2}$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Beweise per Induktion nach $n$, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Berechne dann den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unter Verwendung der Rekursionsvorschrift.

*Hinweis:* Benutze dazu ohne Beweis, dass die Quadratwurzel monoton wachsend ist.

**Weihnachtsaufgabe:** Der FSR Mathematik lädt ein zur Weihnachtsfeier am

**Freitag, 09.12.2022 ab 16 Uhr** im Raum $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{200 \cdot 3^k - 6 \cdot 5^k}{15^k}$.

Bestimme den Raum der Weihnachtsfeier wie folgt.

(a) Zeige für $x, y \in \mathbb{K}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Identität

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}.$$

(b) Folgere aus (a), für $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, die Darstellung

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Sei $|q| < 1$. Beweise mit (b) die Konvergenz der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

(d) Berechne nun den Raum der Weihnachtsfeier.

---

**Ausgabedatum:** 6. Dezember 2022 **Abgabetermin:** 12. Dezember 2022, 10:00 Uhr.